

3. TEHNICI DE MODULAȚIE DIGITALĂ. MODULATORE & DEMODULATOARE

3.1. Semnale BPSK (Binary Phase Shift Keying)

➤ Semnalul transmis are

- Datele transmise $d(t) = \pm 1$, $t \in [kT_b, (k+1)T_b]$, $T_b =$ durata de bit
- Amplitudinea - constantă A
- Frecvența - $\omega_0 = 2\pi f_0$
- Faza – egală cu 0 sau π după cum s-a transmis +/-1

$$\Rightarrow s_{BPSK} = A \cdot \cos(\omega_0 t + d(t)\pi) = \begin{cases} + A \cos(\omega_0 t), & d(t) = +1 \\ + A \cos(\omega_0 t + \pi) = -A \cos(\omega_0 t), & d(t) = -1 \end{cases}$$

➤ Modulatorul. Demodulatorul. Refacerea purtătoarei.

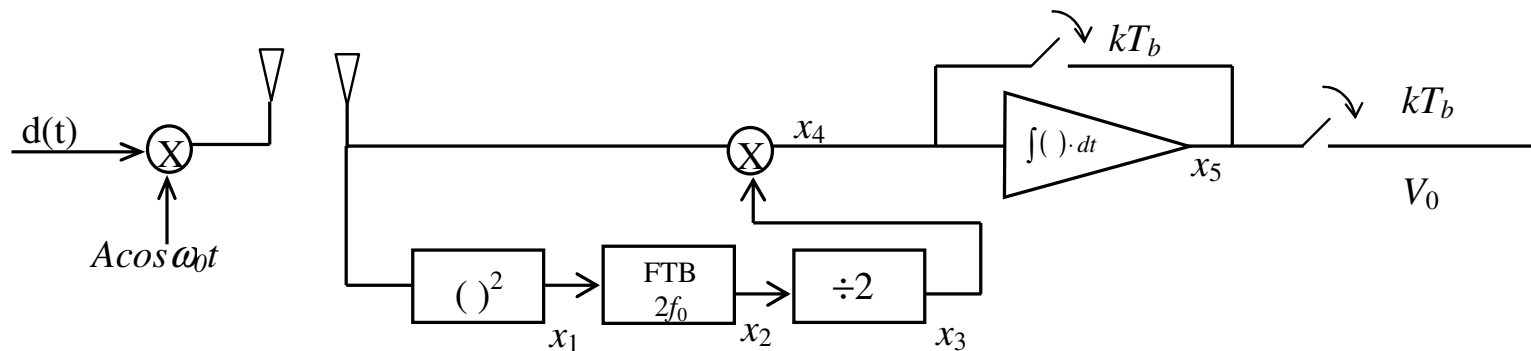


Fig. 3.1. Emitător / Receptor / Refacerea purtătoarei la BPSK

Temă: demonstrați funcționalitatea schemei

- Semnalul recepționat: $r_{BPSK}(t) = A \cdot d(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$

➤ **Densitatea spectrală de putere**

- Semnalul se mai poate scrie sub forma:

$$s_{BPSK}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A d(kT_b) p_1(t - kT_b) \cos \omega_0 t; \quad p_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_b)$$

$$P_1(\omega) = F\{\sigma(t) - \sigma(t - T_b)\} = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T_b}) = T_b \cdot e^{-j\omega \frac{T_b}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_b}{2}\right)$$

- Densitatea spectrala a semnalului modulat

$$S_{BPSK}(f) = \frac{1}{4} \cdot \left[S_{BPSK_{BB}}(f - f_0) + S_{BPSK_{BB}}(f + f_0) \right] = \frac{A^2 \cdot T_b}{4} \cdot \left[\text{sinc}^2\left(\frac{(\omega - \omega_0) \cdot T_b}{2}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{(\omega + \omega_0) \cdot T_b}{2}\right) \right]$$

➤ Reprezentarea în spațiul semnalelor

- Se alege un vector (set de vectori) ortonormați

$$\int_0^{T_b} \varphi^2(t) dt = 1 \Rightarrow \varphi(t) = C_\varphi \cdot \cos \omega_0 t = \int_0^{T_b} (C_\varphi^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t) \cdot dt = \frac{C_\varphi^2 \cdot T_b}{2} = 1;$$

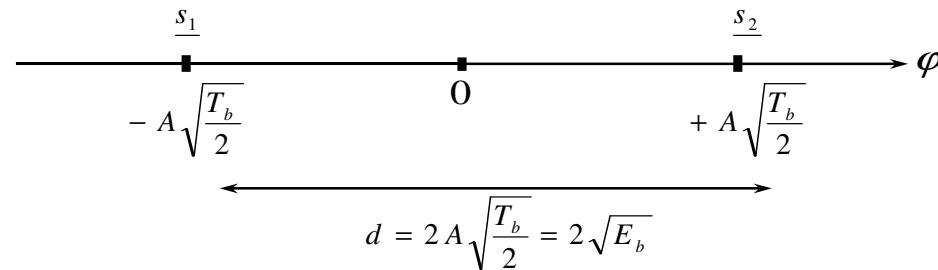
$$\Rightarrow C_\varphi = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \Rightarrow \varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \cos \omega_0 t$$

- Se reprezintă vectorii în funcție de această bază

$$\underline{S}_1 = +A \cdot \cos \omega_0 t = +A \cdot \sqrt{\frac{T_b}{2}} \varphi(t)$$

$$\underline{s}_2 = -A \cdot \cos \omega_0 t = -A \cdot \sqrt{\frac{T_b}{2}} \varphi(t)$$

- Se reprezintă cei doi vectori în funcție de vectorul bazei



- *Obs:* distanța dintre cele două semnale este invers proporțională cu probabilitatea de eroare

➤ **Utilizarea spațiului semnalelor pentru determinarea P_e**

- Ipoteză: semnalul BPSk se transmite printr-un canal afectat doar de ZAGA
- Se reprezintă vectorul zgomot în funcție de vectorul bazei

$$n(t) = n_0 \varphi(t) = n_0 \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \cos \omega_0 t$$

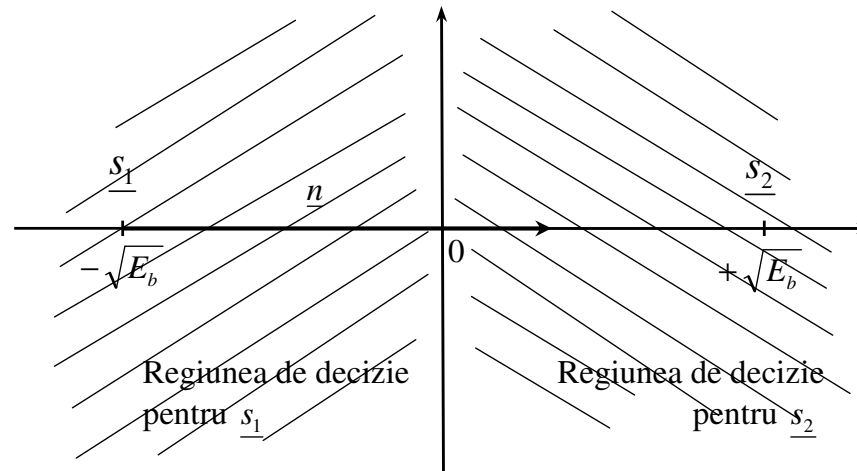
$$n_0 - \text{v.a. Gaussiană cu } \begin{cases} \overline{n_0} = 0 - \text{medie} \\ \sigma^2 = \overline{n_0^2} = \frac{N_0}{2} - \text{abaterea patrată medie} \end{cases}$$

- Presupunând că s-a transmis s_1 și a fost detectat s_2 .

$$P_e = P\left(n > \frac{d}{2}\right) = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n_0^2}{2\sigma^2}} dn_0 \stackrel{\text{def}}{=} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) =$$

$$= Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$\text{unde } Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

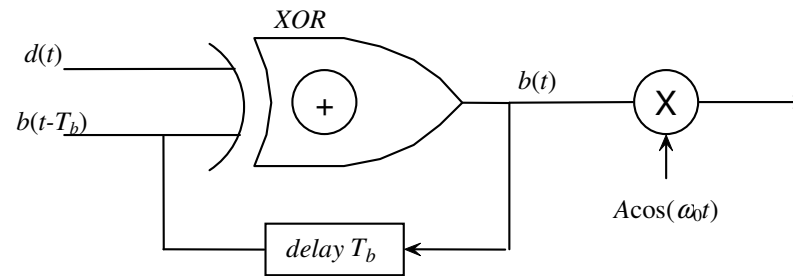


3.2. Semnale PSK Diferențiale (DPSK) și PSK codate diferențial (DEPSK)

- **Problema:** La semnalele BPSK apare o ambiguitate de fază de 180^0
 - Pentru refacerea purtătoarei \Rightarrow se ridică semnalul $d(t) \cdot A \cdot \cos(\omega_0 t)$ la pătrat \Rightarrow dacă semnalul recepționat ar fi fost $-d(t) \cdot A \cdot \cos(\omega_0 t)$ purtătoarea refăcută ar fi fost aceeași \Rightarrow ambiguitate de 180^0 la refacerea purtătoarei;

- Utilizarea DPSK \Rightarrow elimină ambiguitatea de fază de 180^0 ;
- Utilizarea PSK codat diferențial (DEPSK) \Rightarrow elimină necesitatea recepției coerente;

➤ **Generarea datelor DPSK**



Codarea diferențială

$d(t)$		$b(t-T_b)$		$b(t)$		$b(t) b(t-T_b)$
Nivel logic	Valoare (V)	Nivel logic	Valoare (V)	Nivel logic	Valoare (V)	
0	-1	0	-1	0	-1	1
0	-1	1	1	1	1	1
1	1	0	-1	1	1	-1
1	1	1	1	0	-1	-1

- Exemplu

Ck		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$d(t)$		0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
$b(t-T_b)$		0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
$b(t)$	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0

- Observații:

- dacă $d(t)=0, b(t)=b(t-T_b)$
 $d(t)=1, b(t)=\overline{b(t-T_b)} \Rightarrow$

\Rightarrow atunci când $d(t)=0 \Rightarrow b(t)$ își păstrează valoarea, pe când $d(t)=1 \Rightarrow b(t)$ își schimbă valoarea

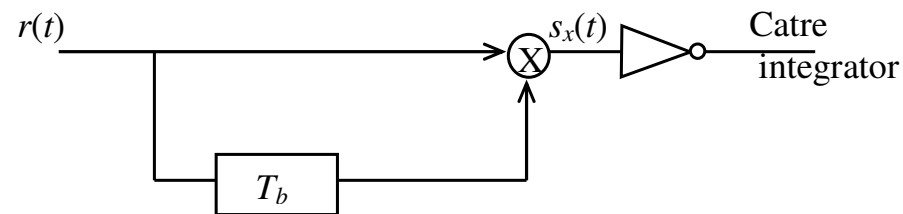
- în cele de mai sus am presupus $b(-T_b)=0$; proprietatea enunțată mai sus se păstrează și dacă $b(-T_b)=1$, datele fiind inversate.
- Din tabel \Rightarrow valoarea produsului $b(t) b(-T_b)$ (în volți) este inversul valorii datelor \Rightarrow procedeul de demodulare

➤ **Demodularea DPSK**

- Semnalul transmis

$$v_{DPSK}(t) = A \cdot b(t) \cdot \cos \omega_0 t = \pm A \cdot \cos \omega_0 t$$

- Conform regulii $d(t)=0 \Rightarrow$ faza $v_{DPSK}(t)$ nu se schimbă
 $d(t)=1 \Rightarrow$ faza $v_{DPSK}(t)$ se schimbă cu π
 $v_{DPSK}(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + d(t) \cdot \pi)$
- Decodorul este reprezentat în figură, presupunând $\omega_0 T_b = 2n\pi$



- Presupunând semnalul recepționat

$$r(t) = A \cdot b(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$s_x(t) = r(t) \cdot r(t - T_b) = A^2 \cdot b(t) \cdot b(t - T_b) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot \cos(\omega_0 t - \omega_0 T_b + \theta) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot b(t) \cdot b(t - T_b) \cdot [\cos(\omega_0 T_b) + \cos(2\omega_0 t - \omega_0 T_b + 2\theta)]$$

unde s-a presupus: $b(t) \cdot b(t - T_b) = \overline{d(t)}$ & $\cos(\omega_0 T_b) = 1$

➤ **Avantaje:** nu necesită demodulare coerentă (refacerea purtătoarei la RX)

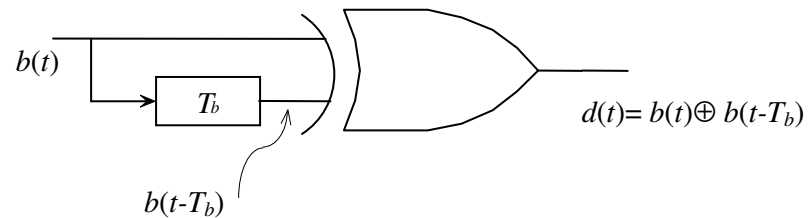
➤ **Dezavantaje :**

- Apariția unei erori \Rightarrow afectează 2 biți succesivi \Rightarrow probabilitatea de eroare a DPSK este mai mare
- Erorile au tendința de a apare în pereche dar nu este obligatoriu, ele putând apare și singular;

exemplu

3.2. Semnale DPSK (BPSK codate diferențial)

- **Problema:** În cazul DPSK demodulatorul necesită un circuit de întârziere cu T_b care trebuie să lucreze în radiofrecvență \Rightarrow greu de realizat !
- **Emitătorul DEPSK:** identic cu DPSK
- **Receptorul DEPSK** – identic cu BPSK (deci sincron!!) pentru refacerea datelor codate $b(t)$, urmat de un circuit de decodare în banda de bază pentru refacerea datelor $d(t)$

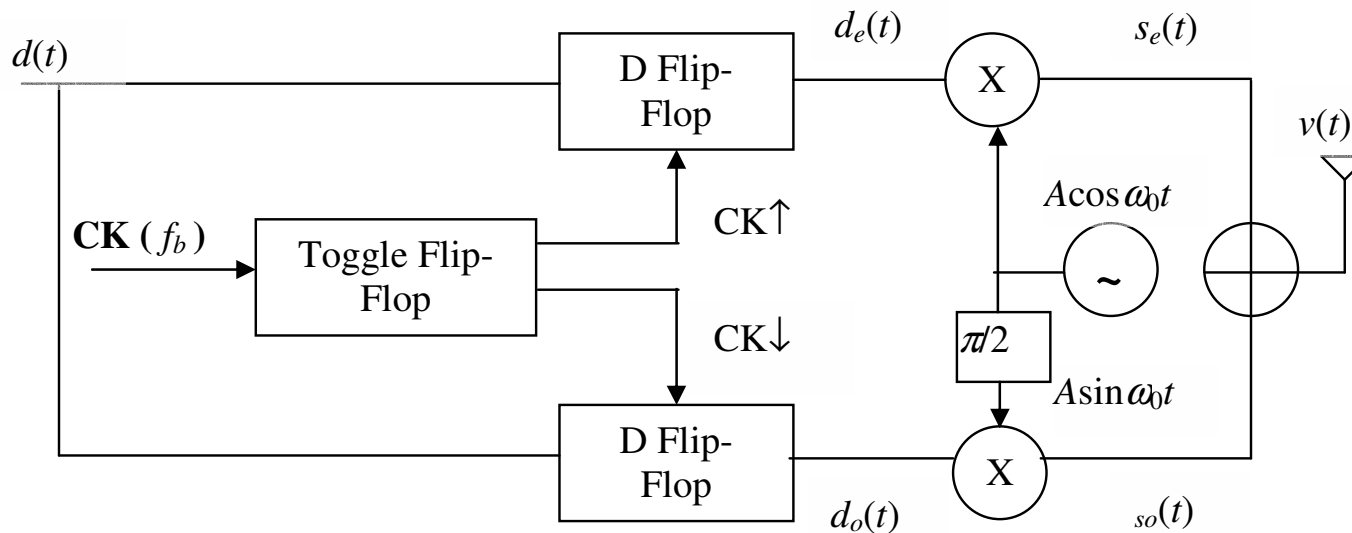


- **Observație:** spre deosebire de DPSK unde erorile puteau apărea atât în pereche cât și simultan, la DEPSK erorile apar *întotdeauna* în pereche. Acesta poate fi un avantaj din punct de vedere al decodării. Acest lucru se petrece deoarece în cazul DEPSK decodarea se face bit cu bit prin decizie hard la sfârșitul fiecărui interval de bit, pe când în cazul DPSK semnalul la ieșire rezultă prin compararea bitului curent cu cel precedent.

Tema: exemplu

3.3. Semnale OQPSK/QPSK

- **Avantaje:** durata de simbol $T_s = 2T_b \Rightarrow$ lărgimea de bandă necesară transmiterii semnalelor QPSK este jumătate din cea necesară transmiterii semnalelor BPSK
- **Emitătorul OQPSK:**

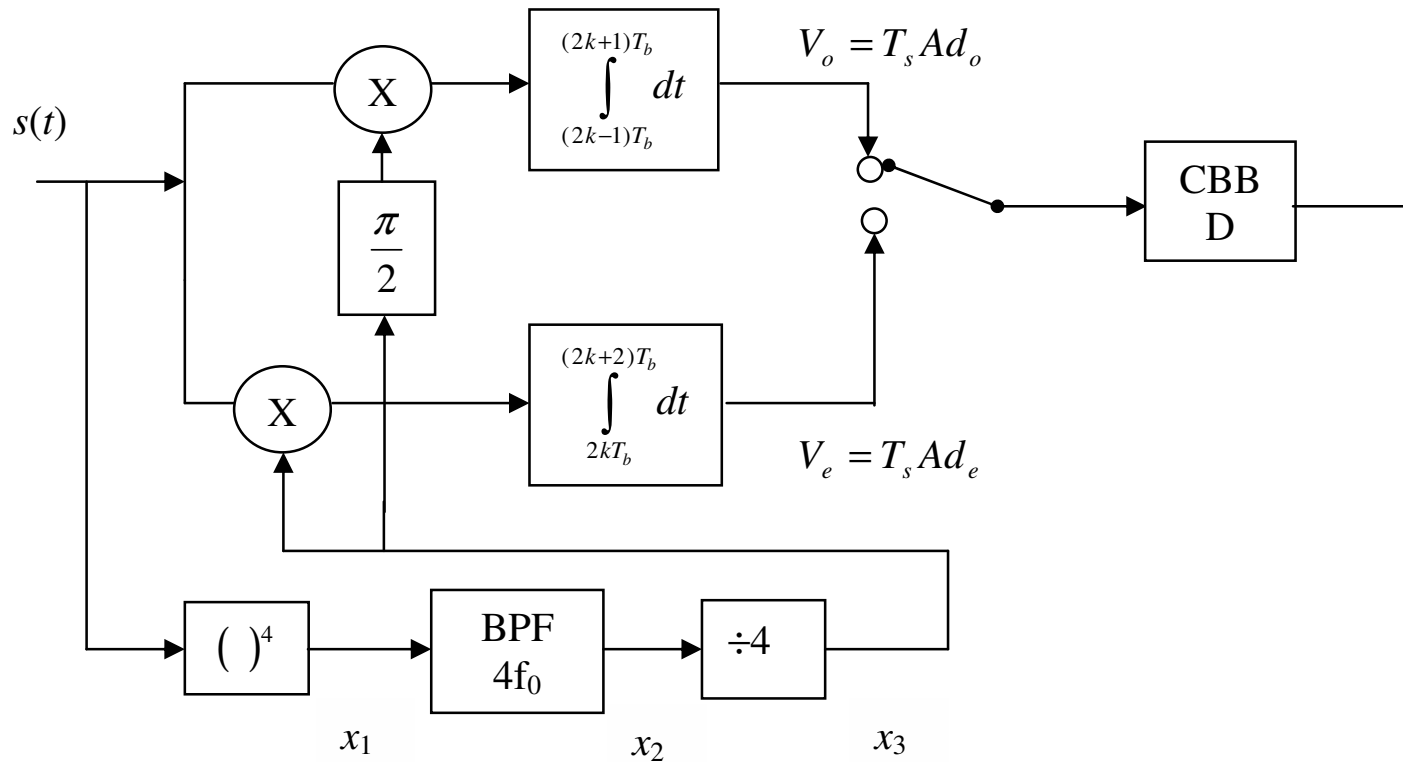


Emitătorul OQPSK. Tema Exemplu

- Datele $d(t)$ sunt aplicate la intrarea ambilor bistabili de tip D, dar unul dintre ei înscrie pe frontul pozitiv al ceasului, celălalt pe frontul negativ
- Cei doi bistabili memorează datele pe un interval de $2T_b \Rightarrow$ rata de bit a $d_o(t)$ și $d_e(t)$ este $R_o = R_e = \frac{1}{2T_b}$;
- datele $d_o(t)$ și $d_e(t)$ comută alternativ \Rightarrow OQPSK; dacă se dorește comutarea simultană a acestora trebuie introdus un circuit de întârziere cu T_b pe ramura în fază;
- semnalul transmis este
$$s_{QPSK}(t) = A \underbrace{d_o(t)}_{\substack{const \\ t \in [-T_b, T_b]}} \cos \omega_0 t + A \underbrace{d_e(t)}_{\substack{const \\ t \in [0, 2T_b]}} \sin \omega_0 t$$

➤ **Receptorul OQPSK**

- ca și în cazul BPSK este necesară demodularea sincronă \Rightarrow refacerea purtătoarei



Demodulatorul OQPSK și schema de refacere a purtătoarei

Tema: demonstrați funcționalitatea

- Observație: circuitul de refacere a purtătoarei are o ambiguitate de fază de $180^0 \Rightarrow$ semnalele demodate pot fi complementare celor transmise \Rightarrow acest

lucru se poate corecta dacă se utilizează codarea diferențială la emisie și decodarea la recepție

➤ **Reprezentarea în spațiul semnalelor**

- Se alege set de vectori ortonormați

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \omega_0 t = \sqrt{\frac{1}{T_b}} \cos \omega_0 t$$

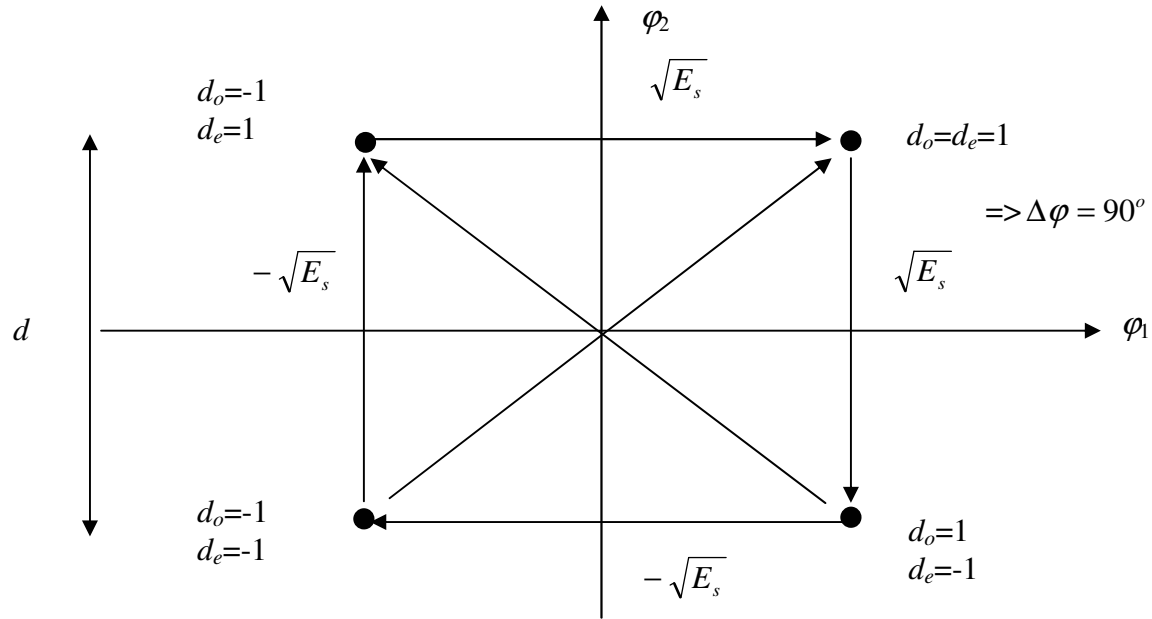
$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_0 t = \sqrt{\frac{1}{T_b}} \sin \omega_0 t$$

cu condiția $\int_0^{T_s} \varphi_1^2(t) dt = 1$

- atunci $s_{QPSK}(t) = A\sqrt{\frac{T_s}{2}}d_o(t)\varphi_1(t) + A\sqrt{\frac{T_s}{2}}d_e(t)\varphi_2(t); \quad d_o(t); d_e(t) \in \{\pm 1\}, t \in [0, T_b]$

$$\begin{aligned}
\langle s_{QPSK}, \varphi_1 \rangle &= \int_0^{T_s} (Ad_o(t) \cos \omega_0 t + Ad_e(t) \sin \omega_0 t) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \omega_0 t dt = \\
&= Ad_o(t) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \int_0^{T_s} \cos^2 \omega_0 t dt + Ad_e(t) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \int_0^{T_s} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt = Ad_o(t) \sqrt{\frac{T_s}{2}} = d_o(t) \sqrt{\frac{A^2}{2} T_s} = d_o(t) \sqrt{E_s} \\
\langle s_{QPSK}, \varphi_2 \rangle &= d_e(t) \sqrt{\frac{A^2}{2} T_s} = d_e(t) \sqrt{E_s}
\end{aligned}$$

unde: $E_s = \frac{A^2 T_s}{2}$ reprezintă energie de simbol



Reprezentarea în spațiul semnalelor a QPSK/OQPSK

- distanța dintre două puncte adiacente este $d = 2\sqrt{E_s} \quad \forall S_1, S_2, S_3, S_4$.
- zgomotul \Rightarrow reprezentat în același sistem de coordonate:

$$n(t) = n_o(t)\varphi_1(t) + n_e(t)\varphi_2(t)$$

unde $n_o(t)$, $n_e(t)$ sunt v.a. Gausiene, independente, cu media nulă și varianță $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

➤ **Probabilitatea de eroare**

- Probabilitatea de detecție corectă : presupunând că s-a transmis $\underline{s}_1 \Rightarrow$ detecția este corectă dacă zgomotul nu va deplasa vectorul recepțional \underline{r} din primul cadran

$$P(c/\underline{s}_1) = P(n_1 > -\frac{d}{2}, n_2 > -\frac{d}{2}) = \int_{-\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n_1^2}{2\sigma^2}} dn_1 \int_{-\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n_2^2}{2\sigma^2}} dn_2 = Q^2\left(-\frac{d}{2\sigma}\right) = \left[1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right]^2$$

$$P_c = \sum_1^4 P(c/\underline{s}_i) \cdot P(\underline{s}_i) = \left[1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right]^2$$

$$P_e = 1 - P_c = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right]^2 = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right]^2 = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- Observație: semnalul mai poate fi scris sub forma

$$\begin{aligned}
s_{QPSK}(t) &= \sqrt{2} \left[Ad_o(t) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_0 t + Ad_e(t) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega_0 t \right] = \\
&= \sqrt{2} Ad_o(t) \cos \left[\omega_0 t + \left(\operatorname{sgn} \frac{d_o}{d_e} \right) \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} Ad_o(t) \cos \left[\omega_0 t + (2i+1) \frac{\pi}{4} \right]; i = \overline{1,4}
\end{aligned}$$

rezultând $b_o = \sqrt{2} \cos(2i+1) \frac{\pi}{4}; \quad b_e = \sqrt{2} \sin(2i+1) \frac{\pi}{4}$

➤ **Densitatea spectrală de putere a QPSK/OQPSK**

- Conform exprimării de mai sus, semnalul OQPSK are impulsul de bază:

$$p_2(t) = [\sigma(t) - \sigma(t - 2T_b)] \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F\{p_2(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega 2T_b}) = T_b \frac{2j \sin \omega T_b}{\sqrt{2} j \omega T_b} e^{-j\omega T_b} = \sqrt{2} T_b e^{-j\omega T_b} \operatorname{sinc}(\omega T_b) = \frac{T_s}{\sqrt{2}} e^{-j\omega \frac{T_s}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)$$

- densitatea spectrală medie de putere a semnalului în banda de bază

$$E\{[2Ad_o(t)]^2\} = 4A^2$$

$$G_z(\omega) = \frac{4A^2}{T_s} \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_s \omega}{2}\right) = 2A^2 T_s \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_s \omega}{2}\right)$$

- deci densitatea spectrală medie de putere a semnalului QPSK este

$$G_{BPSK}(\omega) = \frac{1}{4}G_z(\omega + \omega_0) + \frac{1}{4}G_z(\omega - \omega_0)$$

3.3. Semnale M-PSK

➤ Problema:

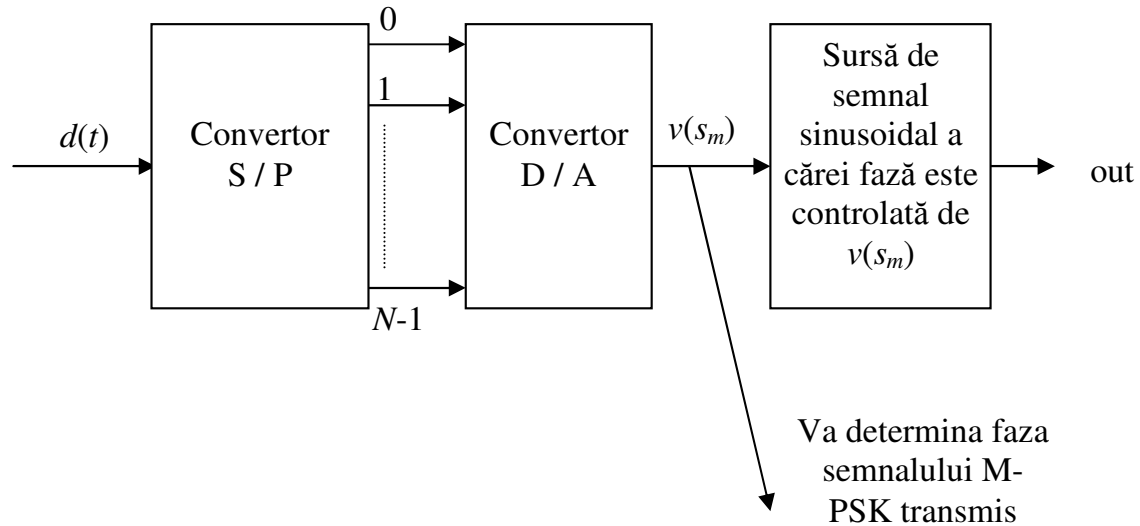
- În BPSK \Rightarrow fiecare bit este transmis individual \Rightarrow faza semnalului se schimbă cu $\{0^\circ, 180^\circ\}$;
- În QPSK \Rightarrow fiecare pereche de biți formează un simbol $T_s = 2T_b \Rightarrow$ faza semnalului se schimbă cu $\{0^\circ, 180^\circ\}$;
- Dacă se utilizează N biți pentru a forma un simbol $\Rightarrow T_s = NT_b \Rightarrow$ pot fi generate $M = 2^N$ simboluri diferite a căror fază diferă cu $\frac{2\pi}{M} = \frac{2\pi}{2^N}$

➤ Semnalul transmis este

$$s_{MPSK}(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_m) = A \underbrace{\cos \phi_m}_{p_e(\text{in phase})} \cdot \cos \omega_0 t - A \underbrace{\sin \phi_m}_{p_o(\text{quadrature})} \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\phi_m = (2m + 1) \frac{\pi}{M}, \quad m = \{0, 1, \dots, M - 1\}$$

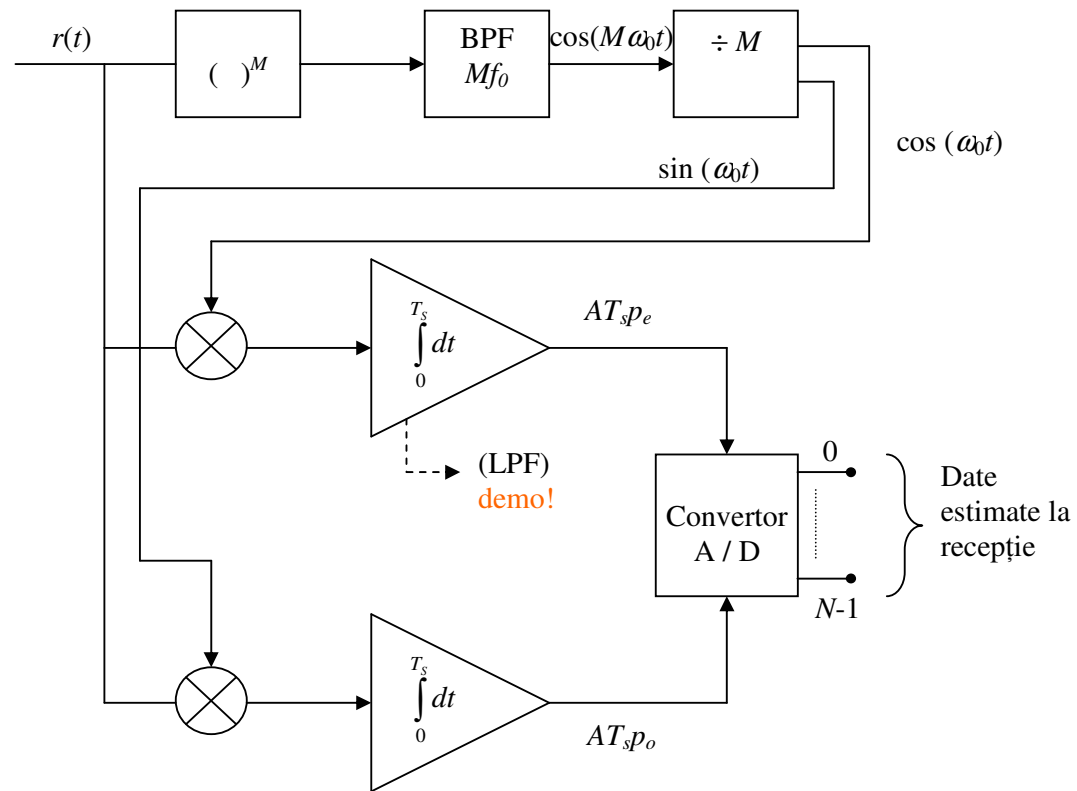
➤ Emițătorul M-PSK



Schema bloc a emițătorului M-PSK

- *Convertorul S/P* stochează N biți de date din șirul $d(t)$ și îi transmite convertorului D/A în paralel \Rightarrow ieșirea sa va rămâne neschimbată pe o durată de $T_s = NT_b$
- *Convertorul S/P* \Rightarrow generează un semnal cu $M = 2^N$ niveluri logice la ieșire, corespunzătoare tuturor combinațiilor de M simboluri aplicate a intrare $\Rightarrow v(s_m)$ depinde de simbolul s_m ($m = 0.. M-1$)
- *Sursa de semnal sinusoidal* \Rightarrow ve genera un semnal de amplitudine constantă a cărei fază este determinată de valoarea lui $v(s_m)$ \Rightarrow faza acestuia se modifică la sfârșitul fiecărui interval de simbol $T_s = NT_b$

➤ **Receptorul M-PSK**



Schema bloc a receptorului M-PSK

- Semnalul M-PSK se mai poate scrie, separând componentele în fază și cuadratură, sub forma

$$s_{MPSK}(t) = \underbrace{A \cos \left[(2m+1) \frac{\pi}{M} \right]}_{p_e \text{ (in phase)}} \cdot \cos \omega_0 t - \underbrace{A \sin \left[(2m+1) \frac{\pi}{M} \right]}_{p_o \text{ (quadrature)}} \cdot \sin \omega_0 t$$

⇒ la demodulare sunt separate datele p_e și p_o cu durata $T_s = NT_b$ transformând-o într-un semnal digital reprezentat pe M biți

$$(2m+1) \frac{\pi}{M} = \operatorname{arctg} \left(\frac{p_e}{p_o} \right)$$

➤ Reprezentarea în spațiul semnalelor a M-PSK

- Vectorii ortonormați sunt

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \omega_0 t$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_0 t$$

- Coordonatele celor M semnale posibile la ieșire sunt

$$v_0 = \left\{ A \sqrt{\frac{T_s}{2}} \cos \frac{\pi}{M}, \quad A \sqrt{\frac{T_s}{2}} \sin \frac{\pi}{M} \right\}$$

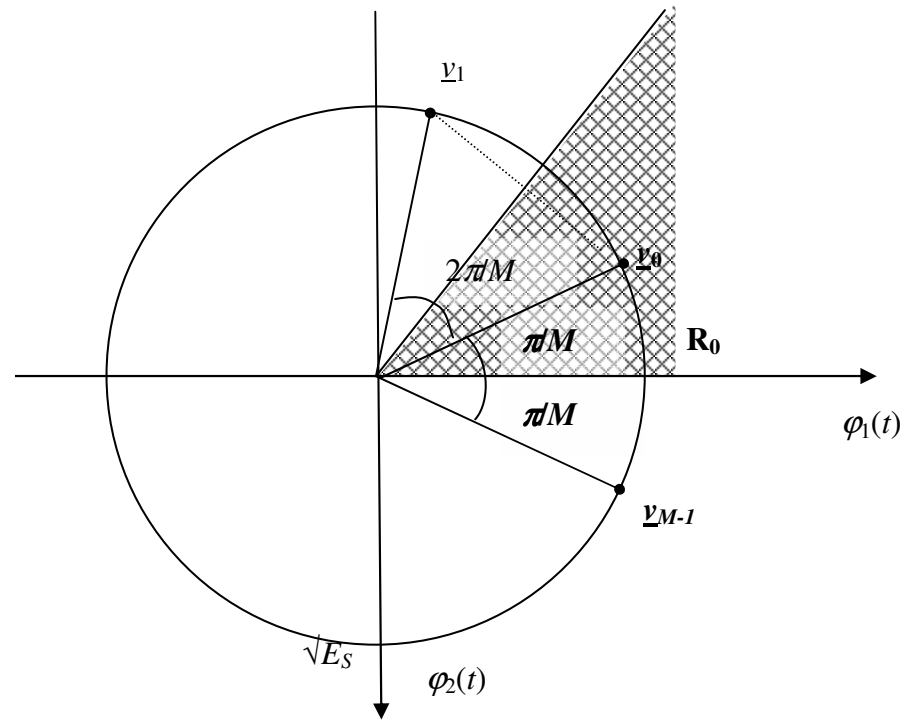
$$v_1 = \left\{ A\sqrt{\frac{T_S}{2}} \cos \frac{3\pi}{M}, \quad A\sqrt{\frac{T_S}{2}} \sin \frac{3\pi}{M} \right\} \quad \text{unde } A\sqrt{\frac{T_S}{2}} = \sqrt{\frac{A^2 T_S}{2}} = \sqrt{E_S} \text{ este}$$

energia semnalului

$$v_m = \left\{ A\sqrt{\frac{T_S}{2}} \cos \frac{(2m+1)\pi}{M}, \quad A\sqrt{\frac{T_S}{2}} \sin \frac{(2m+1)\pi}{M} \right\}$$

$$v_{M-1} = \left\{ A\sqrt{\frac{T_S}{2}} \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{M} \right), \quad A\sqrt{\frac{T_S}{2}} \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{M} \right) \right\}$$

- Reprezentarea semnalului M-PSK în spațiul semnalelor



Reprezentarea semnalelor M-PSK în spațiul semnalelor

- Distanța dintre oricare două punce vecine este

$$d = 2\sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) = \sqrt{4E_s \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$

\Rightarrow pe măsură ce numărul de puncte crește \Rightarrow distanța dintre 2 puncte adiacente scade

- Pentru valori mici ale lui π/M vom avea

$$\sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \cong \frac{\pi}{M} \quad \text{și} \quad \begin{cases} T_s = NT_b \\ 2^N = M \end{cases}$$

$$d^2 = \frac{4\pi^2 E_s}{M^2} = \frac{4\pi^2 NE_b}{M^2}$$

➤ **Probabilitatea de eroare** : presupunând că s-a transmis s_1

$$P(e | s_1) \leq 2P\left(n \geq \frac{d}{2}\right) = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{4\pi^2 NE_b}{4M^2 \frac{N_0}{2}}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\pi^2 NE_b}{N_0 M^2}}\right)$$

$$P_c = [P(c | s_1)]^M = [1 - P(e | s_1)]^M \geq \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2\pi^2 NE_b}{N_0 M^2}}\right)\right]^M \geq 1 - \frac{2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2\pi^2 NE_b}{N_0 M^2}}\right) \Rightarrow$$

$$P_e = 1 - P_c \leq \frac{2}{M} Q \left(\sqrt{\frac{2\pi^2 NE_b}{N_0 M^2}} \right)$$

- Pentru a păstra probabilitatea de eroare constantă trebuie ca

$$\frac{\pi^2 NE_b}{N_0 M^2} = \frac{\pi^2 NE_b}{N_0 2^{2N}} = k = \text{const.} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{k 2^{2N}}{\pi^2 N}$$

\Rightarrow raportul semnal zgomot trebuie să crească într-o manieră exponențială cu N

➤ **Densitatea spectrală de putere**

- Densitățile spectrale de putere ale $p_o(t)$ și $p_e(t)$ sunt date de

$$G_o(f) = \frac{1}{T_s} |P_o(f)|^2 = 2A^2 T_s \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_s}{2} \right) \cdot \underbrace{\overline{\cos^2 \phi_m}}_{\frac{1}{2}} = A^2 T_s \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_s}{2} \right)$$

$$G_e(f) = \frac{1}{T_s} |P_e(f)|^2 = 2A^2 T_s \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_s}{2} \right) \cdot \underbrace{\overline{\sin^2 \phi_m}}_{\frac{1}{2}} = A^2 T_s \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_s}{2} \right)$$

- Lărgimea de bandă ocupată este $B = \frac{2}{T_s} = \frac{2}{NT_b} \Rightarrow$ pe măsură ce numărul de biți pe simbol crește largimea de bandă ocupată scade dar probabilitatea de eroare crește

3.3. Semnale cu modulație în amplitudine în cuadratură (Q-ASK)

➤ Problema:

- În BPSK, QPSK, M-PSK \Rightarrow în fiecare interval de simbol se transmit semnale care diferă unele de altele doar prin faza purtătoarei transmise, amplitudinea semnalului fiind constantă \Rightarrow în reprezentarea fazorială toate punctele cad pe circumferința unui cerc \Rightarrow capacitatea de a distinde un semnal de altul scade pe măsură ce numărul de semnale crește.
- În cazul Q-ASK componentele semnalului în fază și cuadratură pot avea amplitudini diferite \Rightarrow comportare mai bună din punct de vedere al probabilității de eroare
- Semnalul poate fi scris sub forma .

$$S_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} (A_i \cos \omega_0 t + B_i \sin \omega_0 t); \quad 0 \leq t \leq T_s; \quad 1 \leq i \leq 2^N - 1, \quad (*) \text{unde}$$

$$A_i, B_i \in \{\pm a, \pm 3a, \dots, \pm (\log_2 M - 1)a\}; \quad M = 2^N$$

iar a este un parametru ales astfel încât energia medie a semnalului (*) să fie aceeași

- Presupunând că toate semnalele sunt egal probabile,

$$A_i, B_i = \{\pm (2i - 1)a \mid i = 1, 2^{n-1}\}$$

$$p(A_i) = p(B_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{2^n}$$

și utilizând $\sum_1^n i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_1^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ rezultă

$$\overline{A_i^2} = \overline{B_i^2} = \frac{a^2}{2^n} 2 \sum_{i=1}^{2^{n-1}} (2i-1)^2 = \frac{a^2}{2^n} \left[4 \frac{2^{n-1}(2^{n-1}+1)(2 \cdot 2^{n-1}+1)}{6} - 4 \frac{2^{n-1}(2^{n-1}+1)}{2} + 2^{n-1} \right] = \frac{a^2}{3} (4^n - 1)$$

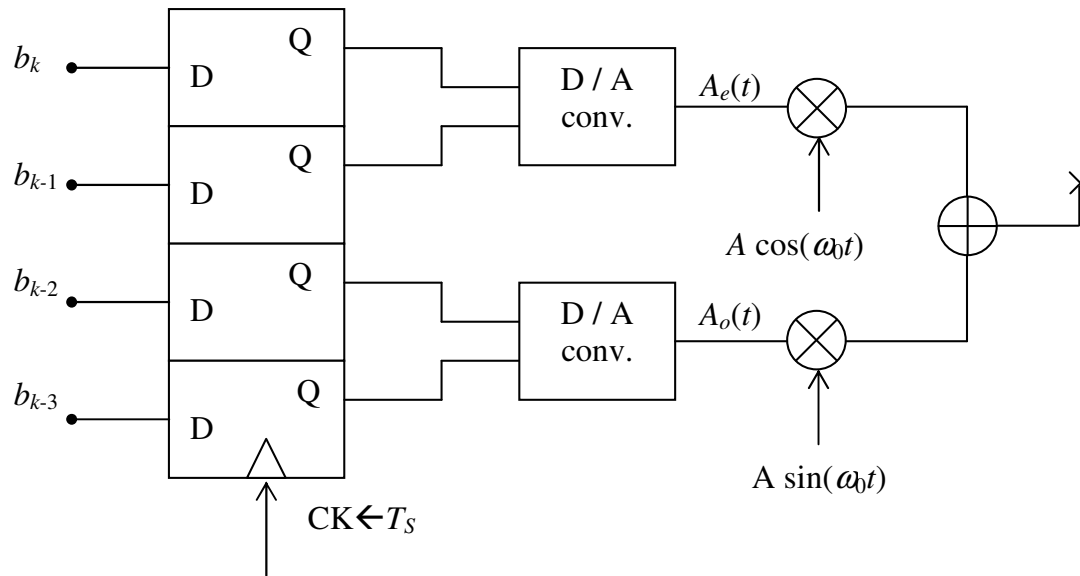
\Rightarrow cu acestea energia de simbol este

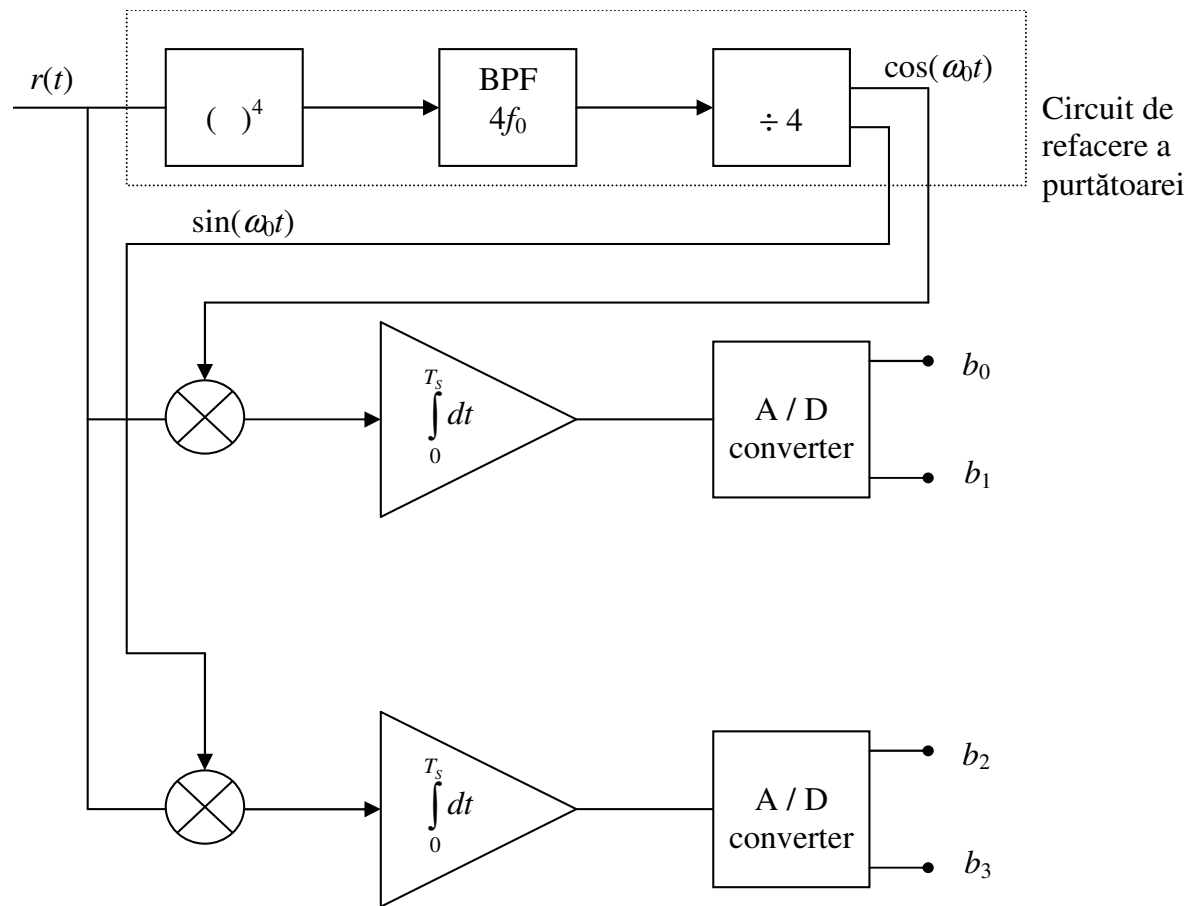
$$E_S = \int_0^{T_S} s_i^2(t) dt = \frac{2}{T_S} \int_0^{T_S} (A_i \cos \omega_0 t + B_i \sin \omega_0 t)^2 dt = \frac{2}{T_S} \left(\frac{\overline{A_i^2}}{2} + \frac{\overline{B_i^2}}{2} \right) T_S = \overline{A_i^2} + \overline{B_i^2} = \frac{2a^2(4^n - 1)}{3}$$

unde $a = \sqrt{\frac{3E_S}{2(M-1)}}$, $E_S =$ energia medie pe simbol

➤ **Emițătorul și receptorul Q-ASK pentru 16-QAM**

$A_i, B_i \in \{ \pm a; \pm 3a \} \Rightarrow M = 2^4 = 16 \Rightarrow 2$ biți / fază și 2 / cuadratură





Receptor

Temă Demonstrați funcționalitatea circuitului de refacere a purtătoarei

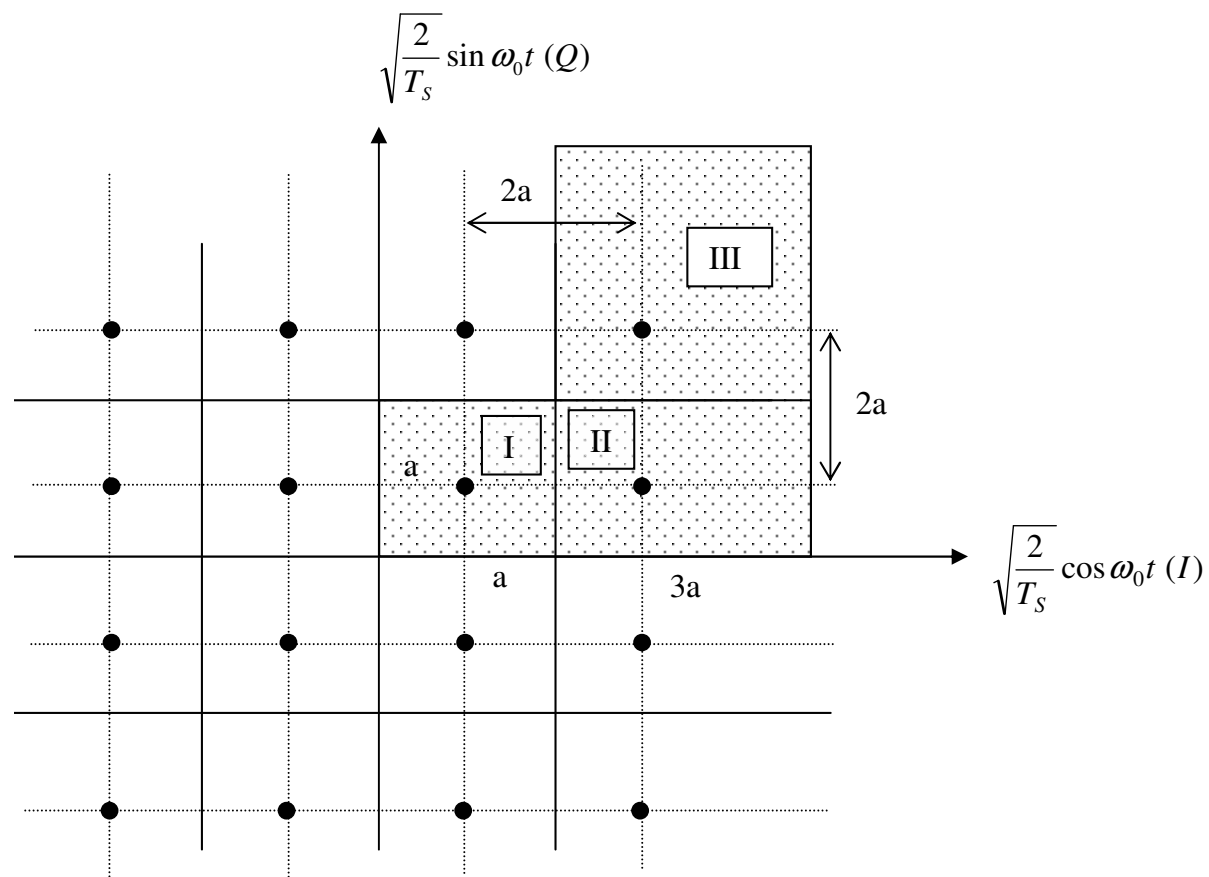
➤ **Reprezentarea în spațiul semnalelor a Q-ASK**

- Vectorii ortonormați sunt

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \omega_0 t$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_0 t$$

- Pentru $A_i, B_i \in \{ \pm a; \pm 3a \} \Rightarrow M = 2^4 = 16$ reprezentarea în spațiul semnalelor este



➤ **Probabilitatea de eroare** : presupunând că s-a transmis \underline{s}_1

$$P_{e,s} = 1 - \underbrace{\left[\frac{\overbrace{4}^{\text{m semnale de tip I}}}{16} \cdot P(C|I) + \frac{8}{16} P(C|II) + \frac{4}{16} P(C|III) \right]}_{\text{probabilitatea de receptie corecta}}$$

$$\text{unde } \sigma_{nI}^2 = \sigma_{nQ}^2 = \frac{N_0}{2}$$

- Probabilitățile de eroare pentru cele 3 regiuni de decizie sunt

$$P(C|I) = \left[\int_{-a}^a \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} du \right]^2 = \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2a}{N_0}}\right) \right]^2$$

$$P(C|II) = \int_{-a}^a \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} du \cdot \int_{-a}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} du = \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2a^2}{N_0}}\right) \right] \cdot \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2a^2}{N_0}}\right) \right]$$

$$P(C | III) = \int_{-a\sqrt{\pi\sigma^2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} du = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2a^2}{N_0}}\right) \right]^2$$

- **Densitatea spectrala medie de putere a QASK**

$$S_{QASK1I}(\omega) = \frac{2}{T_s} E\{A_i^2\} \frac{|P_e(\omega)|^2}{T_s} = \frac{E_s}{2} \frac{1}{T_s} \frac{T_s^2}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) = \frac{E_s}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) = S_{QASK1Q}(\omega)$$

$$S_{QASK}(\omega) = \frac{E_s}{2} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{(\omega - \omega_0)T_s}{2}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{(\omega + \omega_0)T_s}{2}\right) \right]$$

$$B = \frac{2}{T_s} = \frac{2}{NT_b} \quad \text{aceeași ca și în cazul M-PSK}$$

3.4. Semnale cu modulație în frecvență binare (B-FSK)

- În cazul semnalelor BFSK se transmite o sinusoidă de frecvență $\omega_0 + \Omega$ pe durata unei perioade de bit în cazul în care $d(t)=1$, respectiv $\omega_0 - \Omega$ în cazul în care $d(t)=-1$
- Semnalul transmis se poate scrie

$$s_{BFSK}(t) = A \cos[\omega_0 + d(t)\Omega t]$$

ceea ce corespunde

$$d(t) = 1 \quad s_{BFSK}(t) = s_H(t) = A \cos(\omega_0 + \Omega)t, \quad t \in (0, T_b)$$

$$d(t) = -1 \quad s_{BFSK}(t) = s_H(t) = A \cos(\omega_0 - \Omega)t, \quad t \in (0, T_b)$$

➤ Frecvența $\omega_H = \omega_0 + \Omega$ se numește *frecvența unghiulară superioară* iar $\omega_L = \omega_0 - \Omega$ se numește *frecvența unghiulară inferioară*.

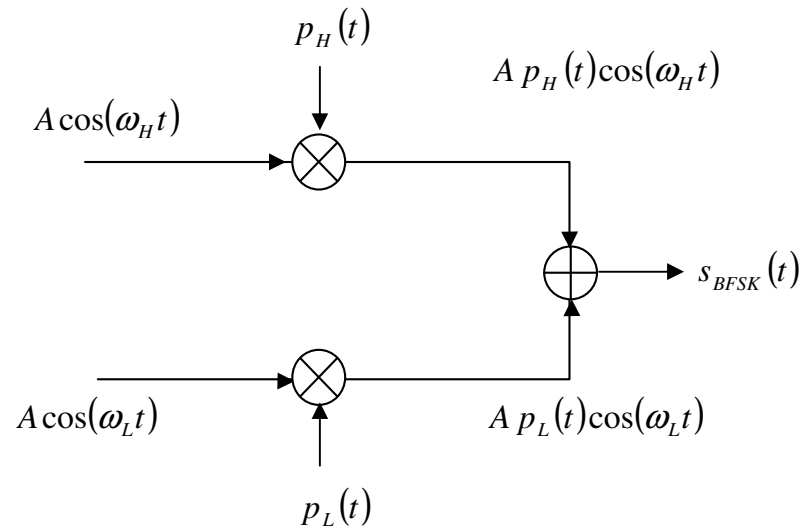
➤ **Emitătorul BFSK**

- Se utilizează două circuite de produs (modulatoare echilibrate) care înmulțesc cele două purtătoare $\omega_H = \omega_0 + \Omega$ și $\omega_L = \omega_0 - \Omega$ cu două semnale binare $p_H(t)$ și $p_L(t) \in \{0, 1\}$

$d(t)$	$p_H(t)$	$p_L(t)$
+1V	+1V	0
-1V	0	+1V

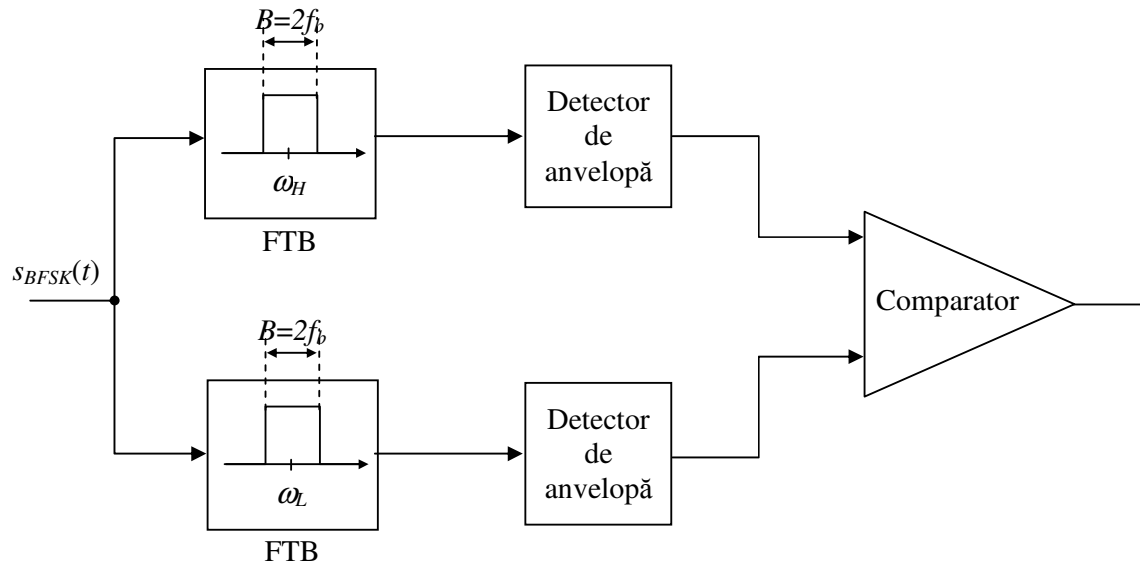
$$p_H(t) = \frac{1+d(t)}{2}; \quad p_L(t) = \frac{1-d(t)}{2}; \quad d(t) \in \{-1, 1\}$$

$$s_{BFSK}(t) = A p_H(t) \cos \omega_H t + A p_L(t) \cos \omega_L t$$



Generarea semnalelor BFSK

➤ **Receptorul BFSK**



Receptorul BFSK

- Observație: Atunci când sistemul este afectat de zgomot ieșirea comparatorului poate varia; din acest motiv în locul detectorului de anvelopă se poate utiliza un integrator și un circuit de eșantionare la sfârșitul fiecărui interval de bit \Rightarrow este necesar un circuit de sincronizare de tact.

➤ Receptorul BFSK

- semnalul BFSK se poate scrie în funcție de $p_H(t)$ și $p_L(t)$

$$s_{BFSK}(t) = A p_H \cos(\omega_H t) + A p_L \cos(\omega_L t) (*)$$

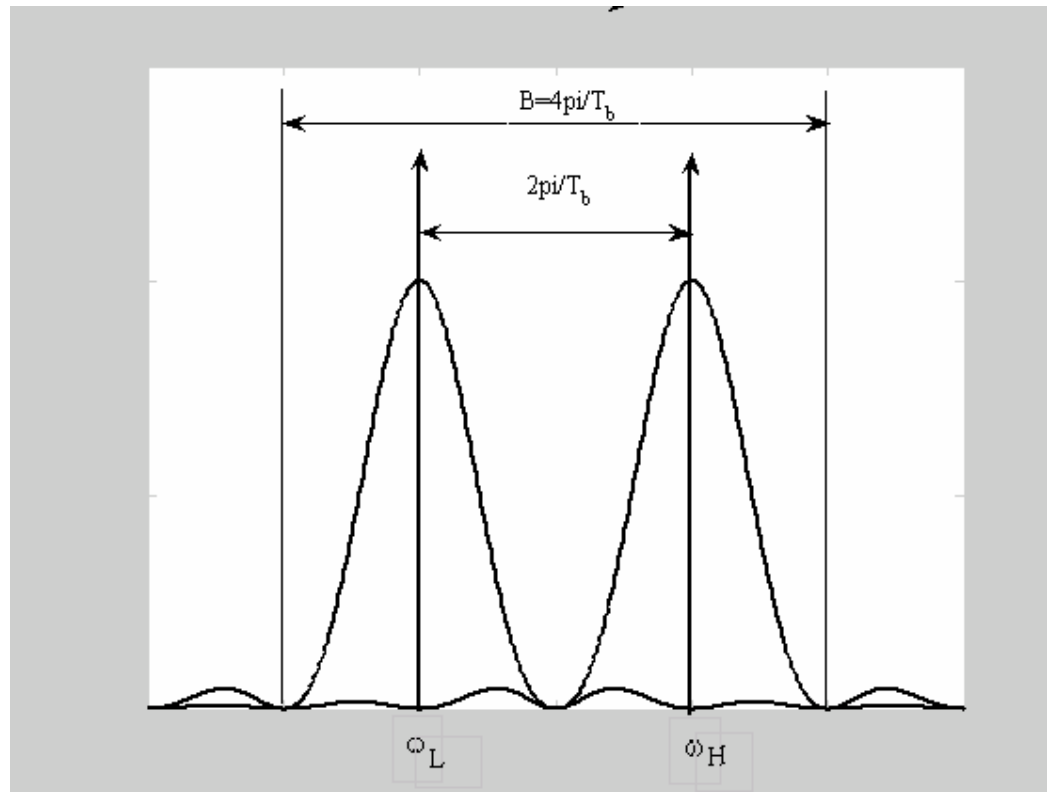
Fiecare termen din ecuația de mai sus este un semnal BPSK pentru care datele $p_H(t)$ și $p_L(t) \in \{0,1\}$; pentru a readuce problema la una cunoscută rescriem

$$p_H(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p'_H(t); \quad p'_H(t) \in \{-1,1\}$$

$$p_L(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p'_L(t); \quad p'_L(t) \in \{-1,1\}$$

$$v_{BFSK} = \frac{A}{2} \cos(\omega_H t) + \frac{A}{2} \cos(\omega_L t) + \frac{A}{2} p'_H \cos(\omega_H t) + \frac{A}{2} p'_L \cos(\omega_L t)$$

- relația de mai sus arată că avem două spectre de tip BPSK centrate pe frecvențele $\omega_H = \omega_0 + \Omega$ și $\omega_L = \omega_0 - \Omega$ și două impulsuri Dirac de amplitudine $A/2$ pe aceleași frecvențe;



Densitatea spectrală de putere a BFSK

- pentru ca cele două spectre de tip BPSK să nu își suprapună lobul principal trebuie ca distanța dintre cele două frecvențe să fie de cel puțin $f_H - f_L = 2f_b$ (**); în acest caz banda ocupată este de

$$B_{BFSK} = f_H - f_L + 2f_b \underset{f_H - f_L = 2f_b}{=} 4f_b$$

deci de două ori mai mare decât a BPSK

➤ **Reprezentarea semnalului BFSK în spațiul semnalelor**

- Având în vedere condiția (***) putem alege

$$f_H = mf_b \quad (m-n)f_b = 2f_b$$
$$f_L = nf_b \quad \Rightarrow m = n + 2$$

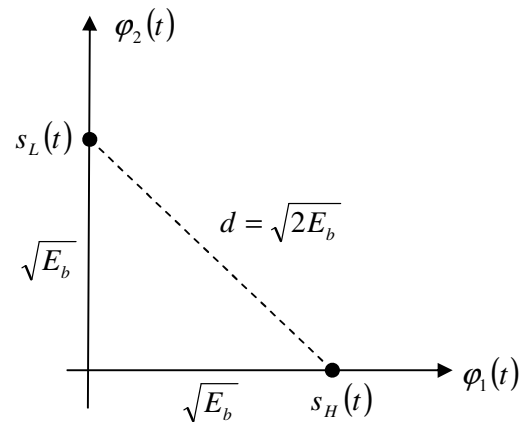
- În acest caz cei doi vectori ai bazei sunt

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi mf_b t, \quad f_b = \frac{1}{T_b}$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi nf_b t$$

- Atunci

$$s_H(t) = \sqrt{E_b} \varphi_1(t)$$
$$s_L(t) = \sqrt{E_b} \varphi_2(t) \quad E_b = \frac{A^2 T_b}{2} \text{ Ortonormați? Demonstrați!!}$$



Reprezentarea BFSK în spațiul semnalelor

- *Observație:* semnalele BFSK sunt ortogonale \Rightarrow distanța dintre cele 2 puncte din reprezentarea în spațiul semnalelor este $d = \sqrt{2E_b}$
- Probabilitatea de eroare

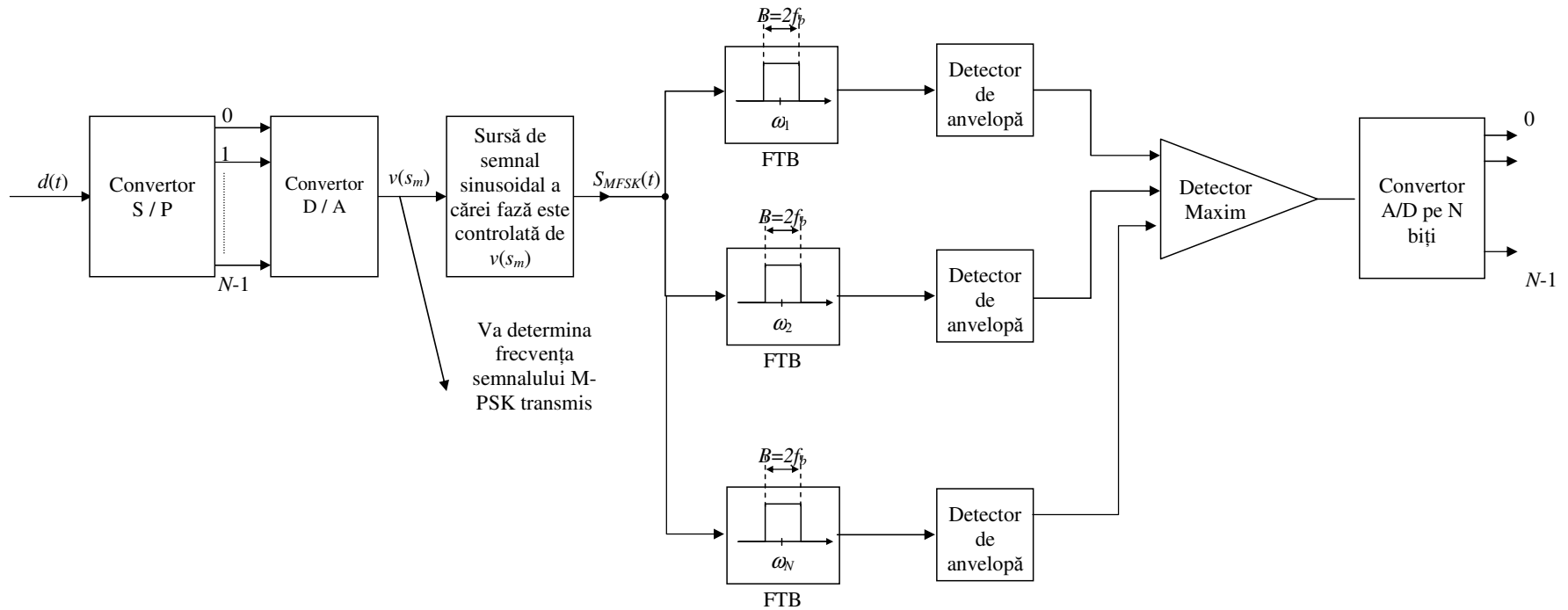
$$P_e = P\left(n > \frac{d}{2}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

3.5. Semnale M-FSK

- Dacă se utilizează N biți pentru a forma un simbol $\Rightarrow T_s = NT_b \Rightarrow$ pot fi generate $M = 2^N$ secvențe pe frecvențele f_0, f_1, \dots, f_{M-1} ,

➤ Emițătorul / receptorul M-FSK

- La emisie
 - fiecare pachet de N biți, ce formează un simbol, este aplicat unui convertor S/P;
 - ieșirea convertorului se aplică unui modulator MF (ce poate fi realizat cu PLL comandat în tensiune) care va genera un semnal cosinusoidal a cărui frecvență este aleasă de simbolul de intrare dintr-un set de $M = 2^N$ valori posibile;
- La recepție
 - Semnalul se aplică unui set de M filtre trece bandă, cu frecvențele centrale f_0, f_1, \dots, f_{M-1} , urmate de detectoare de anvelopă;
 - Ieșirea acestora se aplică unui comparator care va detecta maximum;
 - În final semnalul este convertit A/D pe N biți

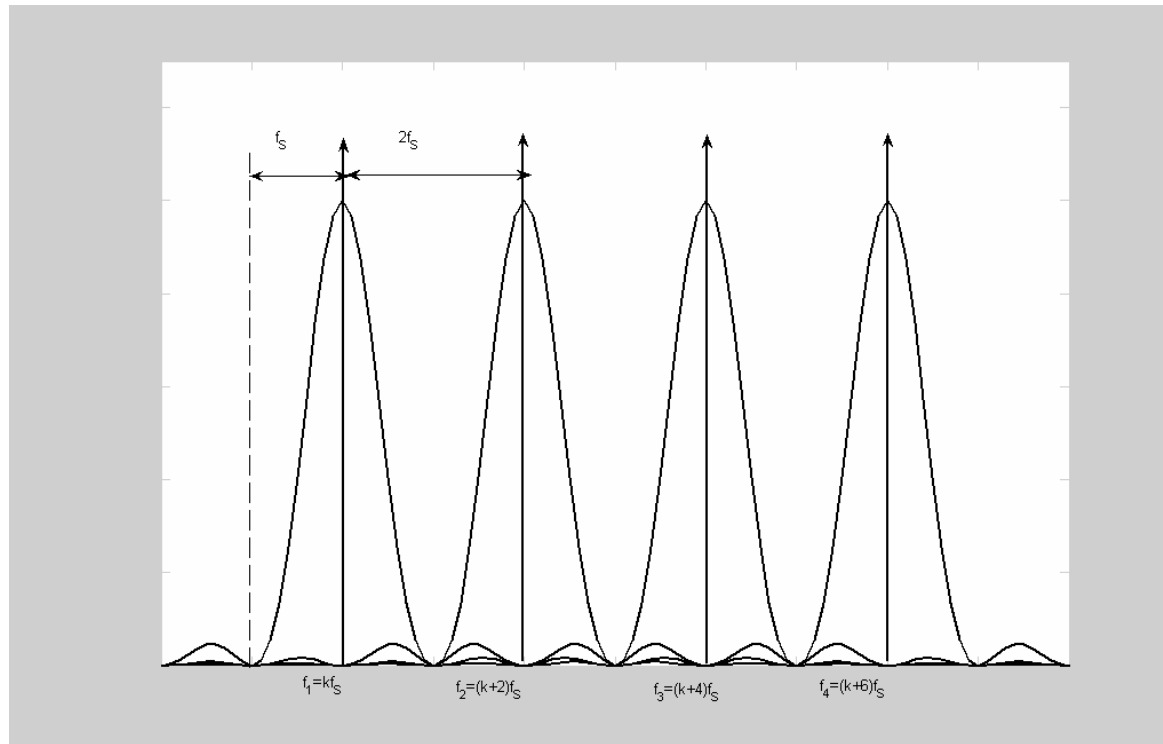


Scheam bloc a emițătorului / receptorului MFSK

- Se poate arăta că probabilitatea de eroare este minimizată atunci când frecvențele f_0, f_1, \dots, f_{M-1} , sunt alese în așa fel încât semnalele să fie mutual ortogonale \Rightarrow trebuie separate între ele cu minim $f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{NT_b}$

- De obicei aceste frecvențe se aleg ca multiplii întregi succesivi ai lui f_s
 $\Rightarrow f_0 = kf_s; f_1 = (k+2)f_s; f_2 = (k+4)f_s; f_2 = (k+3)f_s; \dots f_N = (k+2N)f_s \Rightarrow$
 în acest mod lărgimea de bandă ocupată este minimă

$$B = 2Mf_s = 2^{N+1} f_s = 2^{N+1} \frac{f_b}{N}$$



➤ **Reprezentarea în spațiul semnalelor**

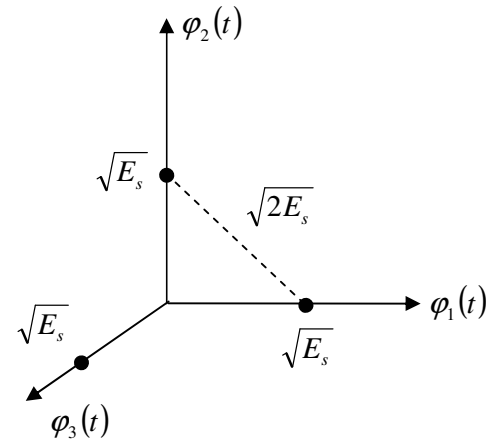
- Se aleg vectorii bazei

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi k f_s t, \quad f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{NT_b}$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi(k+2)f_s t$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi(k+4)f_s t$$

.....



- Distanța dintre două puncte vecine este $d = \sqrt{2E_s}$

➤ Probabilitatea de eroare

- Probabilitatea de recepție corectă

$$P(c | s_1) = P\left(n_1 < \frac{d}{2}\right) \cdot P\left(n_2 < \frac{d}{2}\right) \cdot \dots \cdot P\left(n_M < \frac{d}{2}\right) = \left[1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right]^M$$

- Probabilitatea de eroare

$$P_e = 1 - P_c = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right]^M \geq (M - 1)Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = (M - 1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)$$

3.6. Semnale MSK

- Semnalul MSK se obține din OQPSK dacă se utilizează ca impulsuri

purtătoare $p(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{4T_b}\right)$ pentru datele care comută la multiplii impari ai

T_b , respectiv $q(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{4T_b}\right)$ pentru datele care comută la multiplii pari ai T_b

$$s_{MSK}(t) = A \left[d_o(t) \cos 2\pi \left(\frac{t}{4T_b} \right) \right] \cos \omega_0 t - A \left[d_e(t) \sin 2\pi \left(\frac{t}{4T_b} \right) \right] \sin \omega_0 t$$

- Semnalul se mai poate scrie sub forma

$$s_{MSK}(t) = A \left[\frac{d_o(t) + d_e(t)}{2} \right] \cos(\omega_0 + \Omega)t + A \left[\frac{d_o(t) - d_e(t)}{2} \right] \cos(\omega_0 - \Omega)t$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{4T_b} = 2\pi \left(\frac{f_b}{4} \right)$$

- Notând cu $C_H(t) = \frac{d_o(t) + d_e(t)}{2}$, $C_L(t) = \frac{d_o(t) - d_e(t)}{2}$, $\omega_H = \omega_0 + \Omega$, $\omega_L = \omega_0 - \Omega$ rezultă

$$v_{MSK}(t) = AC_H(t) \cos \omega_H t + AC_L(t) \cos \omega_L t$$

- dacă $b_o = b_e \Rightarrow C_L = 0$ și $C_H = b_0 = \pm 1. \Rightarrow s_{MSK}(t) = \pm A \cos(\omega_0 + \Omega)t$
- dacă $b_o = -b_e, \Rightarrow C_H = 0$ și $C_L = b_0 = \pm 1. \Rightarrow s_{MSK}(t) = \pm A \cos(\omega_0 - \Omega)t$

- frecvențele ω_H și ω_L se aleg astfel încât să fie îndeplinită condiția de ortogonalitate

$$\int_0^{T_b} \cos \omega_H t \cos \omega_L t dt = 0 \Rightarrow 2\pi(f_H - f_L)T_b = n\pi \quad \text{\textbf{\textit{și}}} \quad 2\pi(f_H + f_L)T_b = m\pi$$

- în plus, dacă $\Omega = \frac{2\pi}{4T_b} = 2\pi\left(\frac{f_b}{4}\right)$ și $\omega_H = \omega_0 + \Omega$, $\omega_L = \omega_0 - \Omega$,

$$\Rightarrow f_H = f_0 + \frac{f_b}{4} \quad \text{\textbf{\textit{și}}} \quad f_L = f_0 - \frac{f_b}{4}$$

$$\Rightarrow 2\pi(f_H - f_L)T_b = 2\pi\frac{2f_b}{4}T_b = \pi = n\pi$$

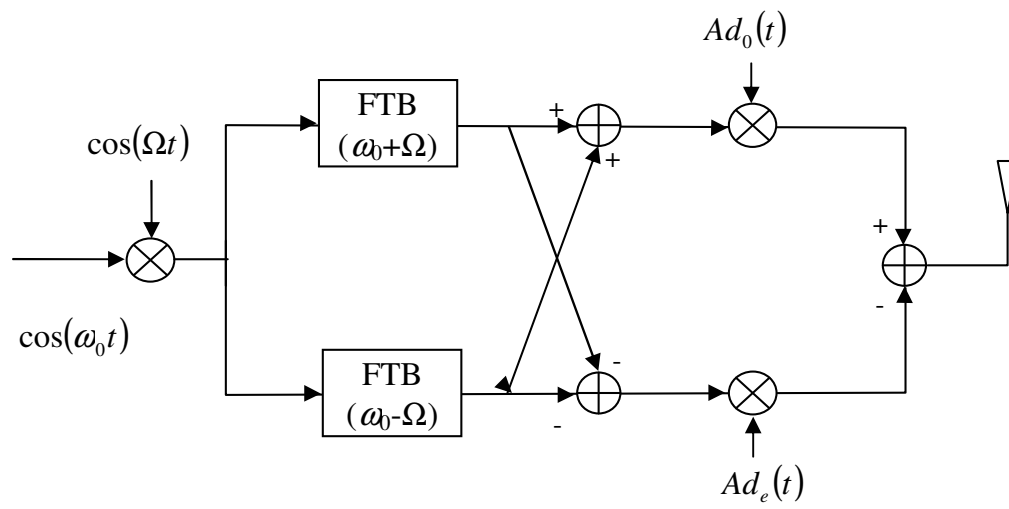
$$\Rightarrow n=1 \Rightarrow f_0 = \frac{m}{4}f_b$$

$\Rightarrow f_H$ și f_L sunt alese cât mai aproape cu putință astfel încât să se respecte condiția de ortogonalitate \Rightarrow „***Minimum Shift Keying***”

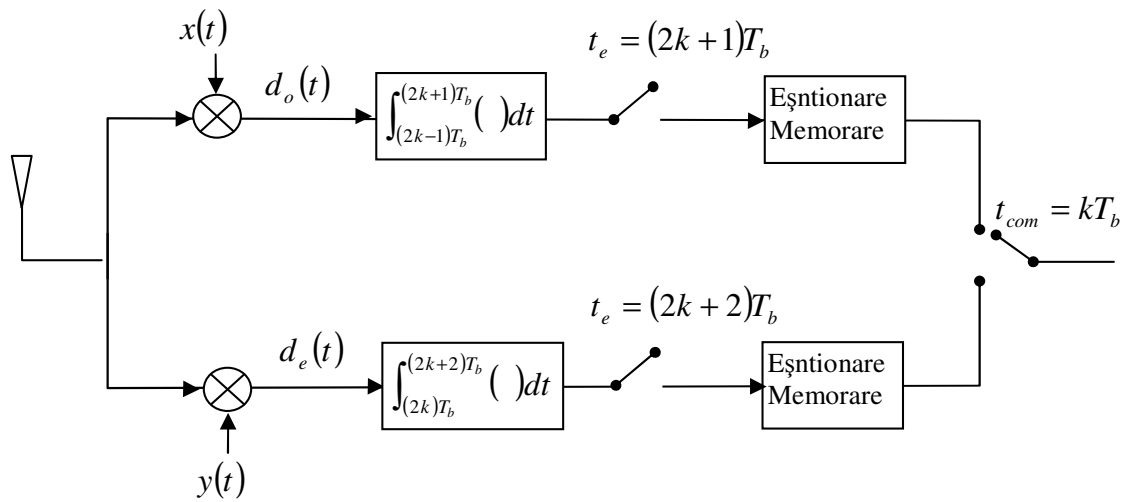
$$\Rightarrow f_H = (m+1)\frac{f_b}{4} \quad \text{\textbf{\textit{și}}} \quad f_L = (m-1)\frac{f_b}{4}$$

➤ **Emițătorul / receptorul MSK**

- O schema posibilă de realizare a emițătorului / receptorului este reprezentată în figura

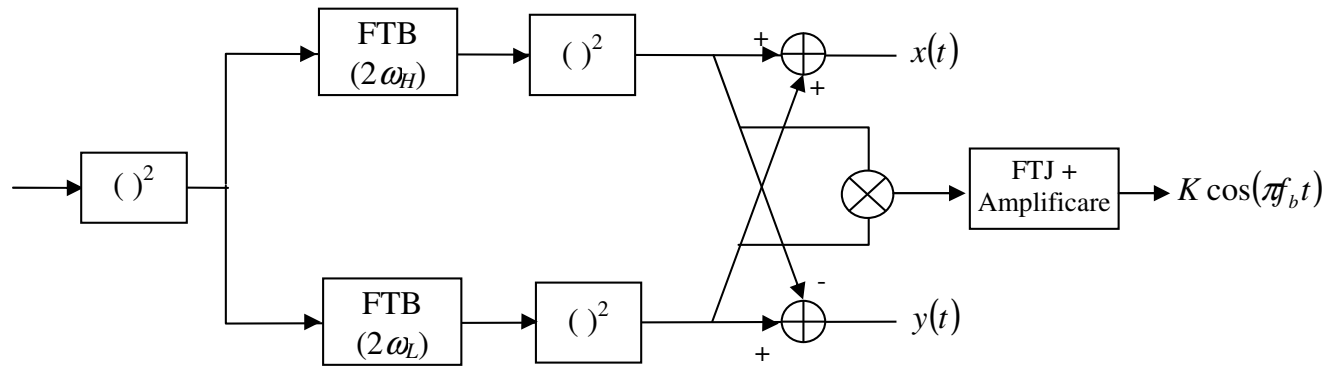


Emițător



Receptor

- Semnalele $x(t)$ și $y(t)$ sunt refăcute astfel



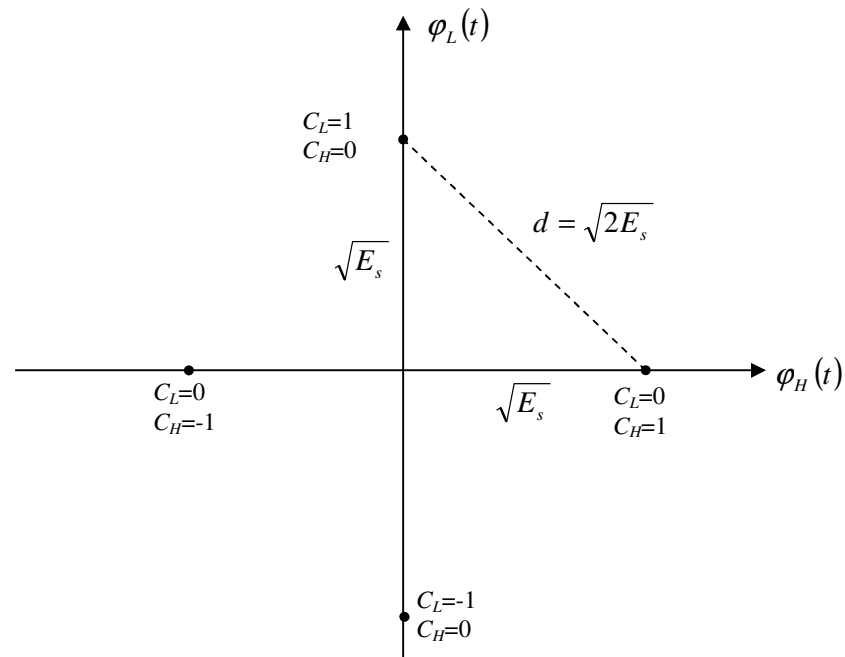
Temă: demonstrați funcționalitatea circuitelor

➤ **Reprezentarea în spațiul semnalelor**

- Se aleg vectorii bazei:

$$\phi_H(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_H t \quad \text{și} \quad \phi_L(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_L t .$$

- Cele 4 puncte ale constelației de semnal sunt reprezentate în figură



- Distanța dintre două puncte vecine este

$$d = \sqrt{2E_s} = \sqrt{4E_b}; \quad E_s = \frac{A^2 T_s}{2}$$

- Probabilitatea de eroare se determină la fel ca în cazul semnalelor QPSK

$$P_e = 1 - P_c = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \right]^2 = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \right]^2 = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

➤ **Densitatea spectrala medie de putere**

- Semnalul MSK se mai poate scrie sub forma

$$s_{QPSK}(t) = \sqrt{2}Ad_o(t)\cos[\omega_o t + d_o(t)d_e(t)\Omega t]$$

- Impulsul de bază este $p(t) = q(t - T_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sigma(t) - \sigma(t - T_s)]\cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \Rightarrow$

$$P(\omega) = \frac{4T_b}{\pi} \frac{\cos(\omega T_b)}{1 - \left(\frac{2\omega T_b}{\pi}\right)^2}, \quad Q(\omega) = P(\omega)e^{-j\omega T_b}$$

- $a_k = b_k = \pm A$ v.a.i.i.d. $\Rightarrow E\{a_k^2\} = E\{b_k^2\} = A^2 \Rightarrow$

$$S_{zz}(\omega) = \frac{16A^2T_b}{\pi^2} \frac{\cos^2(\omega T_b)}{\left[1 - \left(\frac{2\omega T_b}{\pi}\right)^2\right]^2} = \frac{32E_b}{\pi^2} \frac{\cos^2(\omega T_b)}{\left[1 - \left(\frac{2\omega T_b}{\pi}\right)^2\right]^2}; \quad E_b = \frac{A^2T_b}{2}$$

$$\Rightarrow G_{BPSK}(\omega) = \frac{1}{4}G_z(\omega + \omega_0) + \frac{1}{4}G_z(\omega - \omega_0)$$